Exercice 1: Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $\sum\limits_{i=1}^{n}(2i-1) = 2\sum\limits_{i=1}^{n} i - \sum\limits_{i=1}^{n} 1 = 2\frac{n(n+1)}{2} - n = n^2$

2. Si $n \leq 2$, cette somme est nulle. Si $n \geq 3$, $\displaystyle\sum_{k=4}^{n+1}(3k+7) = \sum_{i=1}^{n-2}(3(i+3)+7) = \sum_{i=1}^{n-2}(3i+16) = 3\sum_{i=1}^{n-2} i + 16\sum_{i=1}^{n-2} 1$
   $= 3\frac{(n-2)(n-1)}{2} + 16(n-2) = \dfrac{(n-2)(3n+29)}{2}$.

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1-\frac{1}{2^n}}{2(1-\frac{1}{2})} = 1 - \frac{1}{2^n}$.

Exercice 2: Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

La somme de tous les entiers pairs entre 2 et $2n$: $\displaystyle\sum_{k=2,\, k \text{ pair}}^{2n} k = \sum_{i=1}^{n} 2i = 2\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$.

Le produit de tous les entiers pairs entre 1 et 100 : $\displaystyle\prod_{k=2,\, k \text{ pair}}^{2n} k = \prod_{i=1}^{n}(2i) = 2^n\prod_{i=1}^{n} i = 2^n n!$.

La somme de tous les entiers impairs entre 1 et $2n+1$: $\displaystyle\sum_{k=1,\, k \text{ impair}}^{2n+1} k = \sum_{i=0}^{n}(2i+1) = 2\frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = (n+1)^2$

Le produit de tous les entiers impairs entre 1 et $2n+1$: $\displaystyle\prod_{k=1,\, k \text{ impair}}^{2n+1} k = \frac{\prod\limits_{k=1}^{2n+1} k}{\prod\limits_{n=1,\, k \text{ pair}}^{2n+1} k} = \frac{(2n+1)!}{2^n \times n!}$

Exercice 3: Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$.

2. $\sum\limits_{k=1}^{n} q^k(1-q) = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(q^k - q^{k+1}\right) = q - q^{n+1}$.

3. $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \sum\limits_{k=1}^{n}(k^3+3k^2+2k) = \sum\limits_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + 3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2\frac{n(n+1)}{2} =$
   $\frac{n(n+1)}{4}\left(n(n+1) + 2(2n+1) + 4\right) = \dfrac{n(n+1)(n^2+5n+6)}{4}$.

4. Si $n = 1$, le produit est égal à 1. Soit $n \geq 2$, soit $k \in [\![2, n]\!]$. $\displaystyle 1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2-1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{k-1}{k}\frac{k+1}{k}$.
   $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\frac{k+1}{k} = \prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k} = \frac{1}{n}\frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}$.

Exercice 4: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche à calculer $S_n = \sum\limits_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}k^2$. Le $(-1)^{k-1}$ nous invite à utiliser la méthode de regroupement par terme en séparant les indices pairs et les indices impairs.

$$\begin{aligned}
S_n &= \underbrace{\sum_{p=1}^{n}(-1)^{2p-1}(2p)^2}_{\text{indice pair}} + \underbrace{\sum_{p=0}^{n-1}(-1)^{2p}(2p+1)^2}_{\text{indice impair}} \\
&= \sum_{p=1}^{n} -4p^2 + \sum_{p=0}^{n-1}(2p+1)^2 \\
&= \sum_{p=1}^{n-1}(4p^2+4p+1-4p^2) - 4n^2 + 1 = 4\sum_{p=1}^{n-1} p + \sum_{p=1}^{n-1} 1 - 4n^2 + 1 \\
&= 2n(n-1) + (n-1) - 4n^2 + 1 = -2n^2 - n = -n(2n+1)
\end{aligned}$$

<u>Exercice 5</u>: Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{Re}(\mathbf{e}^{\frac{ik\pi}{2}}) = \mathrm{Re}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \mathbf{e}^{\frac{ik\pi}{2}}\right)$. Calculons d'abord la somme complexe.
   $\sum\limits_{k=0}^{n} e^{\frac{ik\pi}{2}} = \sum\limits_{k=0}^{n} (e^{\frac{i\pi}{2}})^k = \frac{1-(e^{\frac{i\pi}{2}})^{n+1}}{1-e^{\frac{i\pi}{2}}}$. Finalement, $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1-(e^{\frac{i\pi}{2}})^{n+1}}{1-e^{\frac{i\pi}{2}}}\right)$.
   Or, $\frac{1-(e^{\frac{i\pi}{2}})^{n+1}}{1-e^{\frac{i\pi}{2}}} = e^{\frac{in\pi}{4}} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{(n+1)\pi}{4}\right)$.

2. Soit $\theta \in]0; \frac{\pi}{4}[$. $\forall k \in \mathbb{N}$, $\cos^4(k\theta) = \left(\frac{\mathbf{e}^{\mathrm{i}k\theta}+\mathbf{e}^{-\mathrm{i}k\theta}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{i}4k\theta} + 4\mathbf{e}^{\mathbf{i}2k\theta} + 6 + 4\mathbf{e}^{-\mathbf{i}2k\theta} + \mathbf{e}^{\mathbf{i}4k\theta}\right)$.
   D'où $\cos^4(k\theta) = \frac{1}{8}\left(\cos(4k\theta) + 4\cos(2k\theta) + 3\right)$.
   Or, pour tout $\phi \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(k\phi) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{Re}(\mathbf{e}^{ik\phi}) = \mathrm{Re}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \mathbf{e}^{ik\phi}\right) = \begin{cases} n+1 \text{ si } \phi = 0[2\pi] \\ \mathrm{Re}\left(\frac{1-(e^{i\phi})^{n+1}}{1-e^{i\phi}}\right) \text{ sinon} \end{cases}$.
   On utilise comme précédemment la méthode de l'angle moitié.
   Bilan : si $\phi = 0[2\pi]$, $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(k\phi) = n+1$; sinon $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(k\phi) = \cos(\frac{n\phi}{2})\frac{\sin(\frac{(n+1)\phi}{2})}{\sin(\frac{\phi}{2})}$.
   Conclusion : $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos^4(k\theta) = \frac{1}{8}\left(\cos(2n\theta)\frac{\sin(2(n+1)\theta)}{\sin(2\theta)} + 4\cos(n\theta)\frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} + 3(n+1)\right)$

<u>Exercice 6</u>: Soit $n \in \mathbb{N}$. $\sum\limits_{k=0}^{n} (k+1)^4 - k^4 = (n+1)^4$.

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)^4 - k^4 = \sum_{k=0}^{n}(4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) = 4\sum_{k=0}^{n} k^3 + 6\sum_{k=0}^{n} k^2 + 4\sum_{k=0}^{n} k + n + 1.$
Ainsi, $4\sum\limits_{k=0}^{n} k^3 = (n+1)^4 - 6\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 - 4\sum\limits_{k=0}^{n} k - (n+1) = (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1)$
$= (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1) = n^2(n+1)^2$
Finalement, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

<u>Exercice 7</u>: Soit $n \geq 3$. $T_n = \sum\limits_{k=2}^{n-1} (2a_{k+1} - 3a_k + a_{k-1}) = \sum\limits_{k=2}^{n-1} (2a_{k+1} - 2a_k - a_k + a_{k-1})$
$= \sum\limits_{k=2}^{n-1} 2(a_{k+1} - a_k) - (a_k - a_{k-1}) = 2\sum\limits_{k=2}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) - \sum\limits_{k=2}^{n-1}(a_k - a_{k-1}) = 2(a_n - a_2) - (a_{n-1} - a_1)$.

<u>Exercice 8</u>: Soit $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = u_n - 3$. On a $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = 2u_n - 6 = 2(u_n - 3) = 2v_n$.

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q=2$ et de premier terme $v_0=-2$.
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} v_k + \sum_{k=0}^{n} 3 = -2\frac{1-2^{n+1}}{1-2} + 3(n+1) = 5 - 2^{n+2} + 3n.$

Exercice 9: Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k\mathrm{e}^k = \prod_{k=1}^{n} k \prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^k = n!.\mathrm{e}^{\sum_{k=1}^{n} k} = n!\mathrm{e}^{\frac{n(n+1)}{2}}.$

Exercice 10: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in]-\pi;\pi[$. Par les formules de trigonométrie, $\forall k \in [\![1,n]\!] \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \dfrac{\sin(\frac{x}{2^{k-1}})}{2\sin(\frac{x}{2^k})}$.
Donc, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin(\frac{x}{2^{k-1}})}{2\sin(\frac{x}{2^k})} = \frac{1}{2^n}\prod_{k=1}^{n} \frac{\sin(\frac{x}{2^{k-1}})}{\sin(\frac{x}{2^k})} = \frac{1}{2^n}\frac{\sin(x)}{\sin(\frac{x}{2^n})}.$

Exercice 11: Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $\displaystyle\sum_{1\le i<j\le n} 1 = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n-1} \underbrace{(n-(i+1)+1)}_{\text{nombre d'entiers entre } i+1 \text{ et } n} = \sum_{i=1}^{n-1}(n-i) = \sum_{i=1}^{n-1} n - \sum_{i=1}^{n-1} i.$
   En faisant $+n-n$, on obtient $\displaystyle\sum_{1\le i<j\le n} 1 = \sum_{i=1}^{n} n - \sum_{i=1}^{n} i = n^2 - \frac{n(n+1)}{2}$ donc $\displaystyle\sum_{1\le i<j\le n}^{n} 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$

2. $\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n} j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} j = \sum_{i=1}^{n}\frac{n(n+1)}{2} = n\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2}.$

3. $\displaystyle\sum_{1\le i\le j\le n} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j} i = \sum_{j=1}^{n}\frac{j+1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2}+n\right) = \frac{n(n+3)}{4}$

4. $\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n} (i+j)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i^2+2ij+j^2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 2ij + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} j^2.$
   - $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} j^2 = \sum_{i=1}^{n}\underbrace{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}_{\text{formule sur les carrés}} = n\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}.$
   - $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i^2 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}.$
   - $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} j\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} j\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

   Finalement,
   $\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n}^{n}(i+j)^2 = 2\frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} + 2\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n^2(n+1)(4n+2+3n+3)}{6} = \frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}.$

5. Soit $p \in [\![1,n]\!]$. On a : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=p}^{n} 2^{i-j} = \left(\sum_{i=1}^{n} 2^i\right)\left(\sum_{j=p}^{n} 2^{-j}\right) = 2\left(\frac{1-2^n}{1-2}\right)\times 2^{-p}\left(\frac{1-(\frac{1}{2})^{(n-p+1)}}{1-\frac{1}{2}}\right).$
   D'où $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=p}^{n} 2^{i-j} = 4(2^n-1)2^{-p}\left(1-\frac{1}{2^{n-p+1}}\right) = 2^{-n+1}(2^n-1)\left(2^{n-p+1}-1\right).$

6. $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n}(5i^2-18i^2j^2+5j^2)=5\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}i^2-18\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}i^2j^2+5\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}j^2.$
$\displaystyle=10\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}i^2-18\left(\sum_{j=1}^{n}j^2\right)^2=10.\frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}-18.\frac{n^2(n+1)^2(2n+1)^2}{36}$
$\displaystyle=\frac{n^2(n+1)(2n+1)}{2}\left(\frac{10}{3}-(n+1)(2n+1)\right).$

<u>Exercice 12</u>: Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq k\leq n}2^k=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}2^k=\sum_{k=1}^{n}2^k\underbrace{\sum_{i=1}^{k}1}_{=\text{ k}}=\sum_{k=1}^{n}k2^k.$

Par ailleurs, $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq k\leq n}2^k=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n}2^k.$

Or, par la formule sur les suites géométriques, $\sum\limits_{k=i}^{n}2^k=2^i\frac{1-2^{n-i+1}}{1-2}=2^i(2^{n-i+1}-1)=2^{n+1}-2^i.$

Donc, $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq k\leq n}2^k=\sum_{i=1}^{n}(2^{n+1}-2^i)=n2^{n+1}-\sum_{i=1}^{n}2^i=n2^{n+1}-2\frac{1-2^n}{1-2}=n2^{n+1}-2(2^n-1)=2^n(2n-2)+2.$

Donc, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k2^k=2^n(2n-2)+2.$

<u>Exercice 13</u>: Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Soit $p\in\mathbb{Z}$, $\sum\limits_{z\in\mathbb{U}_n}z^p=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\mathbf{e}^{\frac{2ik p\pi}{n}}=\begin{cases}n\text{ si }n|p\\ \frac{1-\mathbf{e}^{\frac{2ip\pi\times n}{n}}}{1-\mathbf{e}^{\frac{2ip\pi}{n}}}=0\text{ sinon}\end{cases}.$

2. Soit $a\in\mathbb{C}$. On a $\displaystyle\sum_{z\in\mathbb{U}_n}(z+a)^n=\sum_{k=0}^{n-1}(\mathbf{e}^{\frac{2ikp\pi}{n}}+a)^n=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\mathbf{e}^{\frac{2ikj\pi}{n}}a^{n-j}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^{n-j}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{e}^{\frac{2ikj\pi}{n}}\right).$
Comme $j\in\{0,...,n\}$, d'après la question précédente, seuls les termes $j=0$ et $j=n$ sont non nuls.
D'où $\displaystyle\sum_{z\in\mathbb{U}_n}(z+a)^n=\binom{n}{0}a^nn+\binom{n}{0}a^0n=n(1+a^n)$

<u>Exercice 14</u>: Soit $n\in\mathbb{N}$.

1. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}1^i1^{n-i}=(1+1)^n=2^n.$

2. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i1^{n-i}=(1+(-1))^n=\begin{cases}0\text{ si }n\neq0\\1\text{ si }n=0.\end{cases}$

3. Si $n=0$ la somme est nulle et si $n\geq1$,
$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}3^{i-1}=\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}3^{i-1}\times1=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}3^i1^{n-i}=\frac{1}{3}\left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}3^i1^{n-i}-\underbrace{1}_{i=0}\right]=\frac{(3+1)^n-1}{3}=\frac{4^n-1}{3}.$

4. Soit $k\in[\![0,n]\!]$. $\displaystyle\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{1}{k+1}\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{(k+1)!(n-k)!}=\frac{n!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!}=\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}.$
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{l=1}^{n+1}\binom{n+1}{l}=\frac{1}{n+1}\left[\sum_{l=0}^{n+1}\binom{n+1}{l}-\binom{n+1}{0}\right]=\frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1).$

<u>Exercice</u> <u>15:</u>
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $k \in [\![1, n]\!]$.
$k\binom{n}{k} = k\dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1+1)!} = n\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}$.
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = \sum_{l=0}^{n-1}\binom{n-1}{l} = 2^{n-1}$.
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k} = \sum_{l=0}^{n-1}n\binom{n-1}{l} = n\sum_{l=0}^{n-1}\binom{n-1}{l} = n2^{n-1}$.

<u>Exercice</u> <u>16:</u>
Par le binôme de Newton, $(a-b)^6 = \displaystyle\sum_{l=0}^{6}\binom{6}{l}a^l b^{6-l}$. Le coefficient en a^4b^2 correspond à $l = 2$,

c'est-à-dire $\binom{6}{2} = 15$.

Toujours par le binôme de Newton, $(a-b+2c)^9 = \displaystyle\sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}(a-b)^{9-k}(2c)^k$.

On cherche le terme en c^3 donc on s'intéresse à $k = 3$ c'est à dire $\binom{9}{3}2^3(a-b)^6$.
Le terme en $a^4b^2c^3$ est donné par celui devant a^4b^2 dans $(a-b)^6$.
Ce coefficient est donc $\binom{9}{3}2^3\binom{6}{2} = 10080$.

<u>Exercice</u> <u>17:</u> On a que $n = 0$ est solution de l'équation et que $n = 1$ et $n = 2$ ne sont pas solutions.
Soit $n \geq 3$. $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = n + \dfrac{n(n-1)}{2} + \dfrac{(n-2)(n-1)n}{6} = \dfrac{6n + 3n(n-1) + (n-2)(n^2-n)}{6} = \dfrac{n^3+5n}{6}$.

Donc l'équation à résoudre est $n^3 + 5n = 30n$ c'est à dire $n(n^2-25) = 0$.
D'où 5 est la seule solution parmi les inconnues $n \geq 3$.
Conclusion : $S = \{0; 5\}$.

<u>Exercice</u> <u>18:</u> Soit $(p, n) \in \mathbb{N}^2$. Si $p > n$ l'égalité est vérifiée $(0 = 0)$.
Supposons à présent que $p \leq n$ Soit $k \in [\![0, p]\!]$.
$\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}\dfrac{(n-k)!}{(p-k)!(n-p)!} = \dfrac{n!}{(n-p)!}\dfrac{1}{k!(p-k)!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}\dfrac{p!}{k!(p-k)!} = \binom{n}{p}\binom{p}{k}$.
$\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \sum_{k=0}^{p}\binom{n}{p}\binom{p}{k} = \binom{n}{p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} = \binom{n}{p}2^p$.

<u>Exercice</u> <u>19:</u> Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la formule du triangle de Pascal, $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\binom{2n+1}{k} = \binom{2n}{k} + \binom{2n}{k-1}$.

$S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{k} = \binom{2n+1}{0} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{k} = 1 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left[\binom{2n}{k} + \binom{2n}{k-1}\right]$

$= 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{2n}{k} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{2n}{k-1} = 1 + \sum_{l=1}^{n}(-1)^l\binom{2n}{l} + \sum_{l=0}^{n-1}(-1)^{l+1}\binom{2n}{l}$

$= 1 + \underbrace{(-1)^n\binom{2n}{n}}_{l=n} + \displaystyle\sum_{l=1}^{n-1}\left[(-1)^l\binom{2n}{l} + (-1)^{l+1}\binom{2n}{l}\right] + \underbrace{(-1)\binom{2n}{0}}_{l=0}$.

Dans la somme principale, si l est pair on trouve $\binom{2n}{l} - \binom{2n}{l} = 0$. Si l est impair, $-\binom{2n}{l} + \binom{2n}{l} = 0$.
Alors, $S_n = 1 + (-1)^n \binom{2n}{n} - 1 = (-1)^n \binom{2n}{n}$.

Exercice 20: Soit $m \in \mathbb{R}$. Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & my & + & m^2z & = & 2m \\ mx & - & m^2y & + & mz & = & 2m \\ mx & + & y & - & m^3z & = & 1-m \end{array}\right. \overset{L_i \leftarrow L_i - mL_1}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & my & + & m^2z & = & 2m \\ 0 & + & 0 & + & (m-m^3)z & = & 2m-2m^2 \\ 0 & + & (1+m^2)y & - & 2m^3z & = & 1-m-2m^2 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & my & + & m^2z & = & 2m \\ 0 & + & (1+m^2)y & - & 2m^3z & = & 1-m-2m^2 \\ 0 & + & 0 & + & m(m-1)(m+1)z & = & 2m(m-1) \end{array}\right.$$

- Si $m = -1$, $S = \emptyset$.
- Si $m \in \{0; 1\}$, nous avons l'équation de deux plans non parallèles donc S est une droite.
- Sinon, S est un singleton.

Exercice 21: Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & by & + & z & = & 1 \\ x & + & aby & + & z & = & a \\ x & + & by & + & az & = & 1 \end{array}\right. \overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & by & + & az & = & 1 \\ x & + & aby & + & z & = & a \\ ax & + & by & + & z & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 - aL_1}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & by & + & az & = & 1 \\ & & (a-1)by & + & (1-a)z & = & a-1 \\ & & b(1-a)y & + & (1-a^2)z & = & 1-a \end{array}\right.$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & by & + & az & = & 1 \\ & & (a-1)by & + & (1-a)z & = & a-1 \\ & & & & (1-a)(2+a)z & = & 0 \end{array}\right.$$

1. Si $a = 1$, l'ensemble des solutions est le plan d'équation : $x + by + z = 1$.
2. Si $a = -2$, le système devient :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & by & - & 2z & = & 1 \\ & & -by & + & z & = & -1 \end{array}\right. \overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & & & - & z & = & 0 \\ & & -by & + & z & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1+by \\ z & = & 1+by \end{array}\right.$$

   L'ensemble des solutions est $\{(1+by, y, 1+by), y \in \mathbb{R}\}$.

3. Si $a \notin \{1, -2\}$, le système devient :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & by & = & 1 \\ & & (a-1)by & = & a-1 \\ & & z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & by & = & 1 \\ & & by & = & 1 \\ & & z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ by & = & 1 \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

   (a) Si $b = 0$, l'ensemble des solutions est l'ensemble vide.
   (b) Si $b \neq 0$, il y a une unique solution qui est $(0, \frac{1}{b}, 0)$.

Exercice 22: Notons (x, y, z, t, u, v) les inconnues entières du journal : $\begin{array}{ccc} ⑨ & ⓧ & ⓨ \\ ⓣ & ⑥ & ⓩ \\ ⓤ & ⓥ & ⑤ \end{array}$. Le but est de résoudre :

$$\begin{cases} 9+x+y=17 \\ t+6+z=16 \\ u+v+5=12 \\ 9+t+u=21 \\ x+6+v=10 \\ y+z+5=14 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=8 \\ x+v=4 \\ y+z=9 \\ z+t=10 \\ t+u=12 \\ u+v=7 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} x+y=8 \\ -y+v=-4 \\ y+z=9 \\ z+t=10 \\ t+u=12 \\ u+v=7 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \begin{cases} x+y=8 \\ -y+v=-4 \\ z+v=5 \\ z+t=10 \\ t+u=12 \\ u+v=7 \end{cases}$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_3}{\iff} \begin{cases} x+y=8 \\ -y+v=-4 \\ z+v=5 \\ t-v=5 \\ t+u=12 \\ u+v=7 \end{cases} \underset{L_5 \leftarrow L_5 - L_4}{\iff} \begin{cases} x+y=8 \\ -y+v=-4 \\ z+v=5 \\ t-v=5 \\ u+v=7 \\ u+v=7 \end{cases} \iff \begin{cases} x=4+v \\ y=4-v \\ z=5-v \\ t=5+v \\ u=7-v \end{cases}$$

Donc $S_{\mathbb{Z}} = \{(4-v, 4+v, 5-v, 5+v, 7-v, v), v \in \mathbb{Z}\}$. Dans $\mathbb{Z}$, il y a une infinité de solutions. Dans $\mathbb{N}$, on doit avoir $v \geq 0$ et $x \geq 0$ i.e. $0 \leq v \leq 4$. Donc $S_{\mathbb{N}} = \{(4,4,5,5,7,0); (3,5,4,6,6,1); (2,6,3,7,5,2); (1,7,2,8,4,3); (0,8,1,9,3,4)\}$. La solution demandée par le journal doit être $(1,7,2,8,4,3)$ (le tableau contient tous les entiers de 1 à 9).